Prof. Dr. Alfred Toth

Primfelder als Transformationsgruppen

1. Bense notierte kurz, daß die kleine semiotische "Matrix (innerer Produktbildung zu den relationalen Subzeichen) der Cayleyschen Gruppentafel entspricht" (1986: 43), Gegeben sei die Menge S = {.1., .2., .3.} der Primzeichen und die Verknüpfung "*". Wir nehmen folgende Zuordnungen vor: a $\rightarrow$ .1., b $\rightarrow$ .2., c $\rightarrow$ .3.. Die einzelnen Produkte lassen sich dann in der nachstehenden semiotischen Gruppentafel darstellen:

*	.1.	.2.	.3.
.1.	.3.	.1.	.2.
.2.	.1.	.2.	.3.
.3.	.2.	.3.	.1.

Man kann zeigen, daß die Menge S und ihre Produkte die vier Gruppenaxiome erfüllen. Die Abgeschlossenheitsbedingung ist erfüllt, weil jedem geordneten Paar der Gruppe ein eindeutig bestimmtes Produkt entspricht:

.1. * .1. = .3.

.1. * .2. = .2. * .1. = .1.

.1. * .3. = .3. * .1. = .2.

.2. * .2. = .2.

.2. * .3. = .3. * .2. = .3.

.3. * .3. = .1.

Die Assoziativität ist ebenfalls erfüllt:

1. * (.2. * .3.) = (.1. * .2.) * .3. = .2.

.1. * (.1. * .3.) = (.1. * .1.) * .3. = .1.

.1. * (.2. * .1.) = (.1. * .2.) * .1. = .3.

.2. * (.3. * .2.) = (.2. * .3.) * .2. = .3.

.3. * (.3. * .1.) = (.3. * .3.) * .1. = .3.

Für a $\neq$ b $\neq$ c ergibt sich interessanterweise als konstantes Produkt .2.:

$.1. * (.2. * .3.) = (.1. * .2.) * .3. = .2.$

$.1. * (.3. * .2.) = (.1. * .3.) * .2. = .2.$

$.2. * (.1. * .3.) = (.2. * .1.) * .3. = .2.$

$.2. * (.3. * .1.) = (.2. * .3.) * .1. = .2.$

$.3. * (.1. * .2.) = (.3. * .1.) * .2. = .2.$

$.3. * (.2. * .1.) = (.3. * .2.) * .1. = .2.$,

und dieses ist das Einselement, denn es gilt:

$.1. * .2. = .2. * .1. = .1.$

$.2. * .2. = .2. * .2. = .2.$

$.3. * .2. = .2. * .3. = .3.$.

Jedes Element hat ein inverses Element:

$.1. * (.1.)^{-1} = .1. * .3. = .2.$

$.2. * (.2.)^{-1} = .2. * .2. = .2.$

$.3. * (.3.)^{-1} = .3. * .1. = .2.$,

d.h., es ist $(.1.)^{-1} = .3.$, $(.2.)^{-1} = .2.$, $(.3.)^{-1} = .1.$

2. Wenn eine Permutationsgruppe mit einer bestimmten Struktur ausgestattet ist und wenn ihre Elemente diese Struktur bewahren, ist sie eine Transformationsgruppe. Im vorliegenden Beitrag sollen nun die in Toth (2021) eingeführten Primfelder als Transformationsgruppen dargestellt werden.

1. Primfeld

$$\begin{array}{llllll}
\text{DS 1} = (\alpha°\beta°, & \alpha°, & \mathrm{id1}) & \times & (\mathrm{id1} \leftarrow \underline{\alpha, \beta\alpha}) & \text{M-them. M} \\
 & | & | & & \quad\quad | \; | & \downarrow\uparrow \\
\text{DS 2} = (\alpha°\beta°, & \alpha°, & \alpha) & \times & (\alpha° \leftarrow \underline{\alpha, \beta\alpha}) & \text{M-them. O} \\
 & | & | & & \quad\quad | \; | & \downarrow\uparrow \\
\text{DS 3} = (\alpha°\beta°, & \alpha°, & \beta\alpha) & \times & (\alpha°\beta° \leftarrow \underline{\alpha, \beta\alpha}) & \text{M-them. I}
\end{array}$$

2. Primfeld

$DS\ 4 = (\alpha^\circ\beta^\circ, id2, id1) \quad \times \quad (\underline{id1} \rightarrow id2 \leftarrow \underline{\beta\alpha})$ M-them. O

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 5 = (\alpha^\circ\beta^\circ, id2, \alpha) \quad \times \quad (\underline{\alpha^\circ, id2} \rightarrow \beta\alpha)$ O-them. M

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 6 = (\alpha^\circ\beta^\circ, id2, \beta\alpha) \quad \times \quad (\underline{\alpha^\circ\beta^\circ} \leftrightarrow \underline{id2} \leftrightarrow \underline{\beta\alpha})$ triad. Them.

3. Primfeld

$DS\ 7 = (\alpha^\circ\beta^\circ, \beta, id1) \quad \times \quad (\underline{id1} \rightarrow \beta \leftarrow \underline{\beta\alpha})$ M-them. I

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 8 = (\alpha^\circ\beta^\circ, \beta, \alpha) \quad \times \quad (\underline{\alpha^\circ} \leftrightarrow \underline{\beta} \leftrightarrow \underline{\beta\alpha})$ triad. Them.

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 9 = (\alpha^\circ\beta^\circ, \beta, \beta\alpha) \quad \times \quad (\underline{\alpha^\circ\beta^\circ, \beta} \rightarrow \beta\alpha)$ I-them. M

4. Primfeld

$DS\ 10 = (\beta, \alpha^\circ, id1) \quad \times \quad (\underline{id1, \alpha} \rightarrow \beta)$ M-them. O

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 11 = (\beta, \alpha^\circ, \alpha) \quad \times \quad (\underline{\alpha^\circ} \rightarrow \alpha \leftarrow \underline{\beta})$ O-them. M

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 12 = (\beta, \alpha^\circ, \beta\alpha) \quad \times \quad (\underline{\alpha^\circ\beta^\circ} \leftrightarrow \underline{\alpha} \leftrightarrow \underline{\beta})$ triad. Them.

5. Primfeld

$DS\ 13 = (\beta, id2, id1) \quad \times \quad (id1 \leftarrow \underline{id2, \beta})$ O-them. M

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 14 = (\beta, id2, \alpha) \quad \times \quad (\alpha^\circ \leftarrow \underline{id2, \beta})$ O-them. O

$| \quad | \qquad\qquad | \quad | \qquad\qquad \downarrow\uparrow$

$DS\ 15 = (\beta, id2, \beta\alpha) \quad \times \quad (\alpha^\circ\beta^\circ \leftarrow \underline{id2, \beta})$ O-them. I

6. Primfeld

DS 16 =	$(\beta, \beta, id1)$	×	$(\underline{id1} \leftrightarrow \underline{\beta} \leftrightarrow \underline{\beta})$	triad. Them.
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 17 =	(β, β, α)	×	$(\underline{\alpha°} \rightarrow \beta \leftarrow \underline{\beta})$	O-them. I
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 18 =	$(\beta, \beta, \beta\alpha)$	×	$(\underline{\alpha°\beta°, \beta} \rightarrow \beta)$	I-them. O

7. Primfeld↓

DS 19 =	$(id3, \alpha°, id1)$	×	$(\underline{id1, \alpha} \rightarrow id3)$	M-them. I
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 20 =	$(id3, \alpha°, \alpha)$	×	$(\underline{\alpha°} \leftrightarrow \underline{\alpha} \leftrightarrow \underline{id3})$	triad. Them.
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 21 =	$(id3, \alpha°, \beta\alpha)$	×	$(\underline{\alpha°\beta°} \rightarrow \alpha \leftarrow \underline{id3})$	I-them. M

8. Primfeld

DS 22 =	$(id3, id2, id1)$	×	$(\underline{id1} \leftrightarrow \underline{id2} \leftrightarrow \underline{id3})$	triad. Them.
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 23 =	$(id3, id2, \alpha)$	×	$(\underline{\alpha°, id2} \rightarrow id3)$	O-them. I
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 24 =	$(id3, id2, \beta\alpha)$	×	$(\underline{\alpha°\beta°} \rightarrow id2 \leftarrow \underline{id3})$	I-them. O

9. Primfeld

DS 25 =	$(id3, \beta, id1)$	×	$(id1 \leftarrow \underline{\beta, id3})$	I-them. M
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 26 =	$(id3, \beta, \alpha)$	×	$(\alpha° \leftarrow \underline{\beta, id3})$	I-them. O
	$\vert \quad \vert$		$\vert \quad \vert$	↓↑
DS 27 =	$(id3, \beta, \beta\alpha)$	×	$(\alpha°\beta° \leftarrow \underline{\beta, id3})$	I-them. I

Literatur

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Toth, Alfred, Prime semiotische Systeme. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2021

5.6.2021